第 2 节 空间向量的应用：证平行、垂直与求角（★★★）

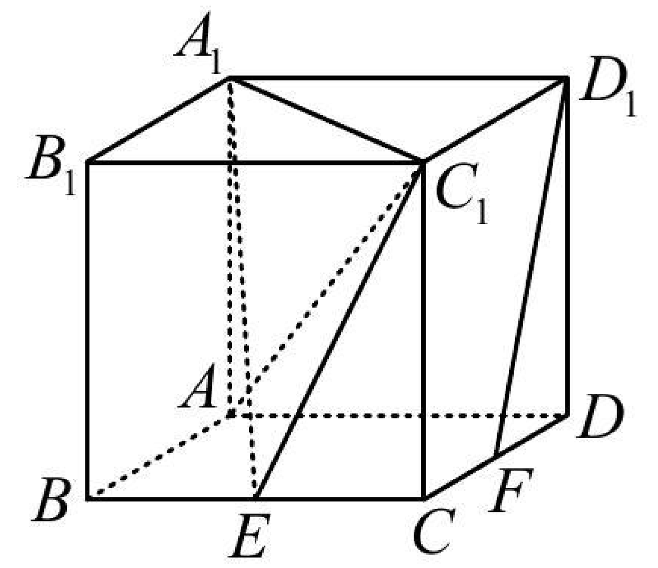
强化训练

1．（2021 • 天津卷 • ★★）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 BC，CD 的中点.

（1）求证：D_1F // 平面 A_1EC_1；

（2）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值；

（3）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值.



解：（1）（本题用几何法可做，但观察发现后面两问要用平面 A_1EC_1 的法向量，故不妨第 1 问就用向量法证）

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,2)$，$E(2,1,0)$，$C_1(2,2,2)$，$D_1(0,2,2)$，$F(1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{D_1F}=(1,0,-2)$，设平面 A_1EC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x+2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=y+2z=0\end{cases}$，令 $x=2$，则 $\begin{cases}y=-2\\ z=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$ 是平面 A_1EC_1 的一个法向量，

因为 $\overrightarrow{D_1F}\cdot\boldsymbol{n}=1\times2+0\times(-2)+(-2)\times1=0$，且 $D_1F\not\subset$ 平面 A_1EC_1，所以 D_1F // 平面 A_1EC_1.

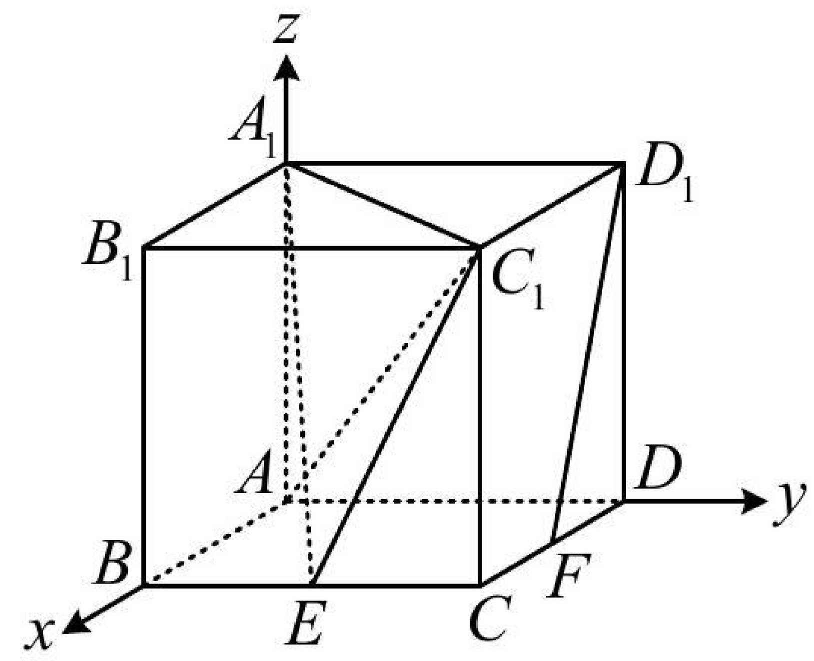
（2）由图可知，$\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$，由（1）知 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$ 是平面 A_1EC_1 的一个法向量，

因为 $\left|\cos<\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，所以直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

（3）$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，设平面 AA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=2z'=0 & ①\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=2x'+2y'+2z'=0 & ②\end{cases}$

将①代入②化简得：$x'+y'=0$，令 $x'=1$，则 $y'=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$ 是平面 AA_1C_1 的一个法向量，

从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{2\sqrt{2}}{3})^2}=\dfrac{1}{3}$.

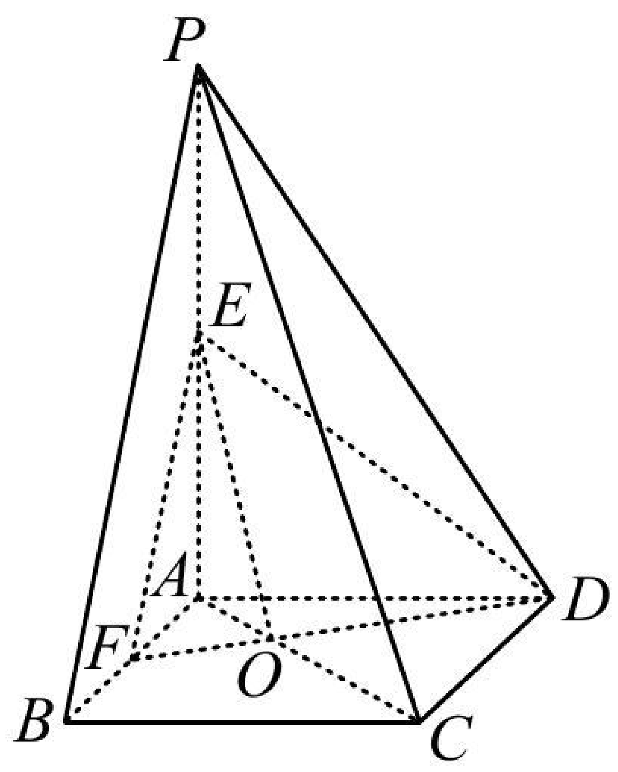


注：由于空间向量计算比较无脑，所以以下题目选取均具有一定灵活性.

2.（2022 • 山东模拟 • ★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=2$，$AP=3$，直线 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，E，F 分别为 PA，AB 的中点，直线 AC 与 DF 相交于点 O.

（1）证明：OE 与 CD 不垂直；

（2）求二面角 $B-PC-D$ 的余弦值.



解：（1）（几何法不好证，但图形本身就有三条两两垂直的直线，故很方便建系，只需证 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}\neq 0$）

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $E(0,0,\dfrac{3}{2})$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，所以 $\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，

（求 $\overrightarrow{OE}$ 需要点 O 的坐标，故得找到 O 在 AC 上的位置，可借助相似分析相似比）

由图可知 $\Delta AOF\backsim\Delta COD$，所以 $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{AF}{CD}=\dfrac{1}{2}$，从而 $OA=\dfrac{1}{2}OC$，故 $OA=\dfrac{1}{3}AC$，

所以 $O(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},0)$，从而 $\overrightarrow{OE}=(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2})$，故 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{4}{3}\neq 0$，所以 OE 与 CD 不垂直.

（2）$B(2,0,0)$，$P(0,0,3)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-2,-2,3)$，

设平面 BPC，PCD 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=2y_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=-2x_1-2y_1+3z_1=0\end{cases}$，

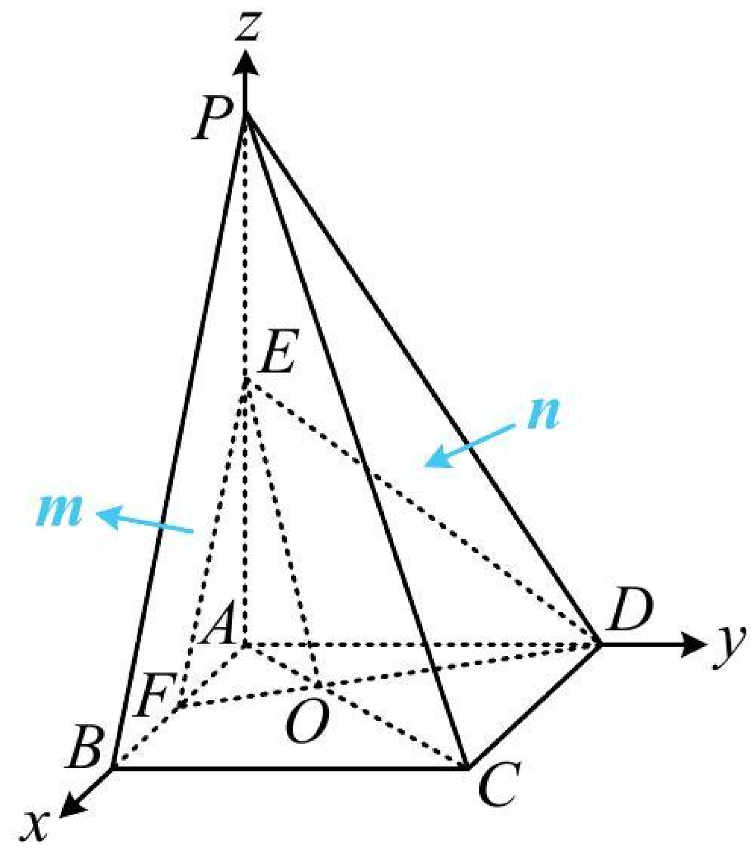
所以 $\begin{cases}y_1=0\\ -2x_1+3z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=3$，则 $z_1=2$，故 $\boldsymbol{m}=(3,0,2)$ 是平面 BPC 的一个法向量，

（此处由图可以想象所求二面角为钝角，若想不出来，取法向量时，就取成一个朝内，一个朝外，如图）

又 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=-2x_2-2y_2+3z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-2x_2=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x_2=0\\ -2y_2+3z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=-3$，则 $z_2=-2$，

所以 $\boldsymbol{n}=(0,-3,-2)$ 是平面 PCD 的一个法向量，从而 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}=-\dfrac{4}{13}$，

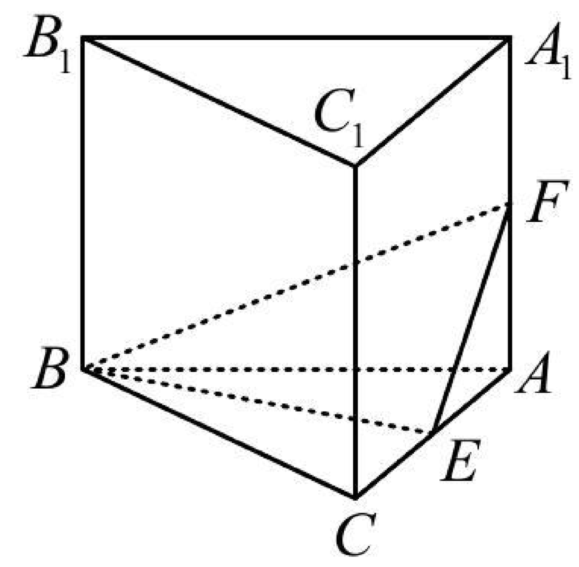
由图可知，二面角 $B-PC-D$ 为钝角，故其余弦值为 $-\dfrac{4}{13}$.



3．（2023 • 山东模拟 • ★★★）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E，F 分别是线段 AC，AA_1 的中点，$\angle BCA=\angle BAC$.

（1）求证：平面 $BEF\perp$ 平面 ACC_1A_1；

（2）若 $\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且二面角 $A-BF-E$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，求 $\dfrac{AA_1}{AC}$ 的值.



解：(1)（要证面面垂直，先找线面垂直，直三棱柱中，面 $ABC\perp$ 面 ACC_1A_1，故只需在面 ABC 内找交线 AC 的垂线，由面面垂直的性质定理，它必与面 ACC_1A_1 垂直，观察发现可选 BE）

因为 $\angle BCA=\angle BAC$，所以 $BA=BC$，又 E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$ ①，

因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC，又 $BE\subset$ 平面 ABC，所以 $BE\perp AA_1$ ②，

由①②结合 AC，AA_1 是平面 ACC_1A_1 内的相交直线可得 $BE\perp$ 平面 ACC_1A_1，

又 $BE\subset$ 平面 BEF，所以平面 $BEF\perp$ 平面 ACC_1A_1.

（2）（第 1 问证明了 $BE\perp$ 平面 ACC_1A_1，故可以 E 为原点建系处理，写点的坐标需要长度，所给条件是角度，它与图形的大小无关，只与形状有关，故可将 BC 设为具体数值，将 AA_1 设为未知数，为了便于计算，由所给的 $\cos\angle ACB$ 将 BC 设为 $\sqrt{5}$）

以 E 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设 $BC=\sqrt{5}$，$AA_1=2a(a>0)$，

则 $CE=BC\cdot\cos\angle ACB=1$，$AE=CE=1$，$AC=2CE=2$，$BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=2$，

所以 $A(0,-1,0)$，$B(2,0,0)$，$F(0,-1,a)$，$E(0,0,0)$，故 $\overrightarrow{BF}=(-2,-1,a)$，$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{EB}=(2,0,0)$，

设平面 ABF 和平面 BEF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

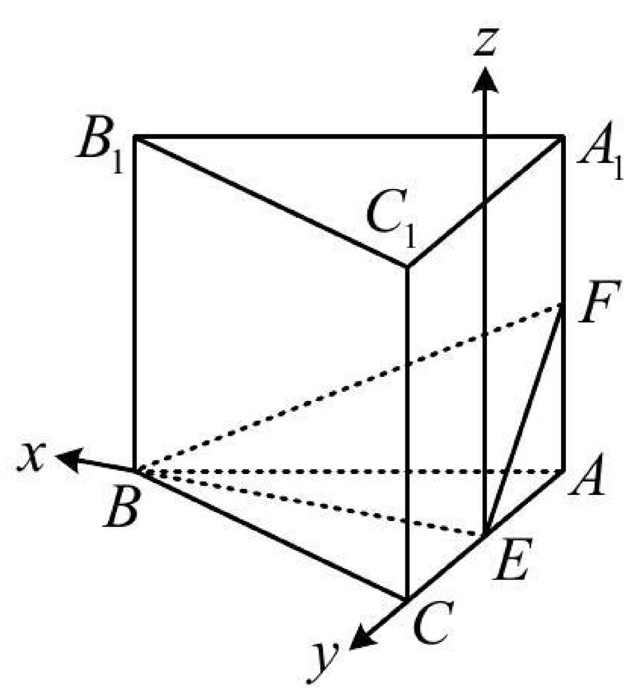
则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x_1-y_1+az_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2x_1+y_1=0\end{cases}$，令$x_1=1$，则$\begin{cases}y_1=-2\\ z_1=0\end{cases}$，所以$\boldsymbol{m}=(1,-2,0)$是平面$ABF$的一个法向量，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x_2-y_2+az_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=2x_2=0\end{cases}$，令$y_2=a$，则$\begin{cases}x_2=0\\ z_2=1\end{cases}$，所以$\boldsymbol{n}=(0,a,1)$是平面$BEF$的一个法向量，

由图可知二面角$A-BF-E$为锐角，且由题意，其余弦值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，

所以$|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2a|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，

结合$a>0$可解得：$a=3$，所以$\dfrac{AA_1}{AC}=\dfrac{2a}{2}=3$.

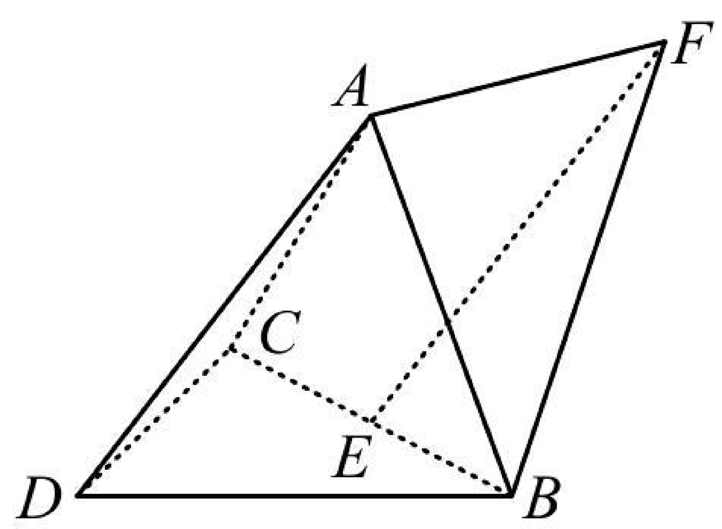


【反思】已知二面角求其余量，仍然先算两个半平面的法向量，用它们的夹角余弦建立方程求解未知数.

4.（2023 •新高考Ⅱ卷 •★★★）如图，三棱锥$A-BCD$中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^{\circ}$，$E$为$BC$的中点.

（1）证明：$BC\perp DA$；

（2）点F满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角$D-AB-F$的正弦值.



解：（1）（BC和DA是异面直线，要证垂直，需找线面垂直，可用逆推法，假设$BC\perp DA$，注意到条件中还有$DB=DC$，所以$BC\perp DE$，二者结合可得到$BC\perp$面ADE，故可通过证此线面垂直来证$BC\perp DA$）

因为$DA=DB=DC$，$\angle ADB=\angle ADC=60^{\circ}$，所以$\Delta ADB$和$\Delta ADC$是全等的正三角形，故$AB=AC$，

又E为BC中点，所以$BC\perp AE$，$BC\perp DE$，因为AE，$DE\subset$平面ADE，$AE\cap DE=E$，

所以$BC\perp$平面ADE，又$DA\subset$平面ADE，所以$BC\perp DA$.

（2）（由图可猜想EA，EB，ED两两垂直，若能证出这一结果，就能建系处理，故先尝试证明）

不妨设$DA=DB=DC=2$，则$AB=AC=2$，

因为$BD\perp CD$，所以$BC=\sqrt{DB^2+DC^2}=2\sqrt{2}$，

故$DE=CE=BE=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{2}$，

所以 $AE^2+DE^2=4=AD^2$，故 $AE\perp DE$，所以 EA，EB，ED 两两垂直，

以 E 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,\sqrt{2})$，$D(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，

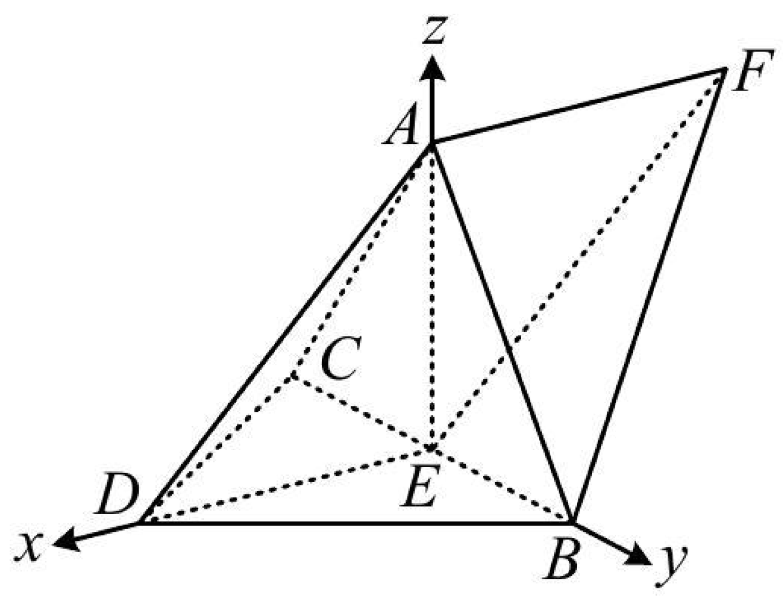
所以 $\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，由 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$ 可知四边形 $ADEF$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{ED}=(\sqrt{2},0,0)$，

设平面 DAB 和平面 ABF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $\begin{cases}y_1=1\\ z_1=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$ 是平面 DAB 的一个法向量，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FA}=\sqrt{2}x_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，则 $\begin{cases}x_2=0\\ z_2=1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ 是平面 ABF 的一个法向量，

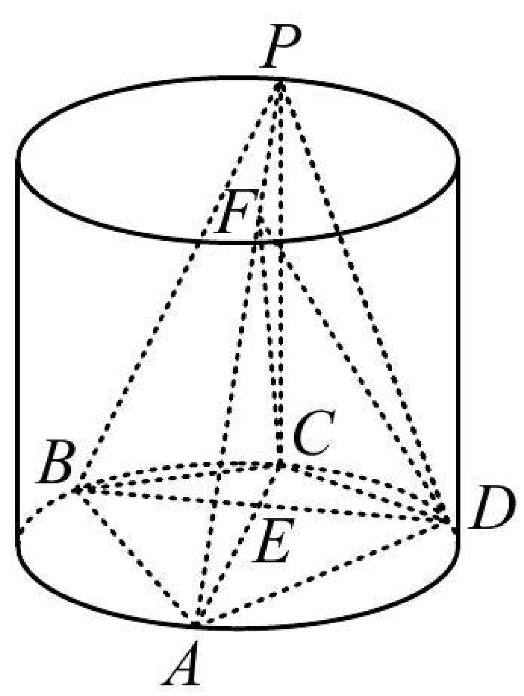
从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



5.（2023·四省联考·★★★）如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱底面的内接四边形，AC 是圆柱的底面直径，PC 是圆柱的母线，E 是 AC 与 BD 的交点，$AB=AD$，$\angle BAD=60^{\circ}$.

（1）记圆柱的体积为 V_1，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V_2，求 $\dfrac{V_1}{V_2}$；

（2）设点 F 在线段 AP 上，且 $PA=4PF$，$PC=4CE$，求二面角 $F-CD-P$ 的余弦值.



解：(1)（圆柱和四棱锥的高相等，只需分析它们的底面积关系，即可求得 $\dfrac{V_1}{V_2}$，不妨把底面单独画出来看）

如图 1，设 AC 中点为 O，圆 O 半径为 r，因为 $AB=AD$，$\angle BAD=60^{\circ}$，所以 ΔABD 为正三角形，

故 $AC\perp BD$，且 $\angle OBE=30^{\circ}$，所以 $BE=OB\cdot\cos\angle OBE=\dfrac{\sqrt{3}r}{2}$，$BD=2BE=\sqrt{3}r$，

故四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times 2r\times\sqrt{3}r=\sqrt{3}r^2$，设圆柱的高为 h，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\pi r^2h}{\frac{1}{3}\times\sqrt{3}r^2h}=\sqrt{3}\pi$.

（2）以 C 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，由（1）可得 $OE=OB\cdot\sin\angle OBE=\dfrac{r}{2}$，$CE=OC-OE=\dfrac{r}{2}$，

又 $PC=4CE$，所以 $PC=2r$，故 $P(0,0,2r)$，$C(0,0,0)$，$D(\dfrac{r}{2},\dfrac{\sqrt{3}r}{2},0)$，$A(2r,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{CD}=(\dfrac{r}{2},\dfrac{\sqrt{3}r}{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,2r)$，（还需求 $\overrightarrow{CF}$ 的坐标，可结合 $PA=4PF$ 直接用向量的线性运算求）

因为 $PA=4PF$，所以 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{CP}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{PA}=(0,0,2r)+\dfrac{1}{4}(2r,0,-2r)=(\dfrac{r}{2},0,\dfrac{3r}{2})$，

设平面 PCD，FCD 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{r}{2}x_1+\dfrac{\sqrt{3}r}{2}y_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=2rz_1=0\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $y_1=-1$，故 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,0)$ 是平面 PCD 的一个法向量，

又 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{r}{2}x_2+\dfrac{\sqrt{3}r}{2}y_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=\dfrac{r}{2}x_2+\dfrac{3r}{2}z_2=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ x_2+3z_2=0\end{cases}$，令 $x_2=3$，则 $\begin{cases}y_2=-\sqrt{3}\\ z_2=-1\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(3,-\sqrt{3},-1)$ 是平面 FCD 的一个法向量，从而 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{2\times\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，

由图可知二面角 $F-CD-P$ 为锐角，故其余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$.

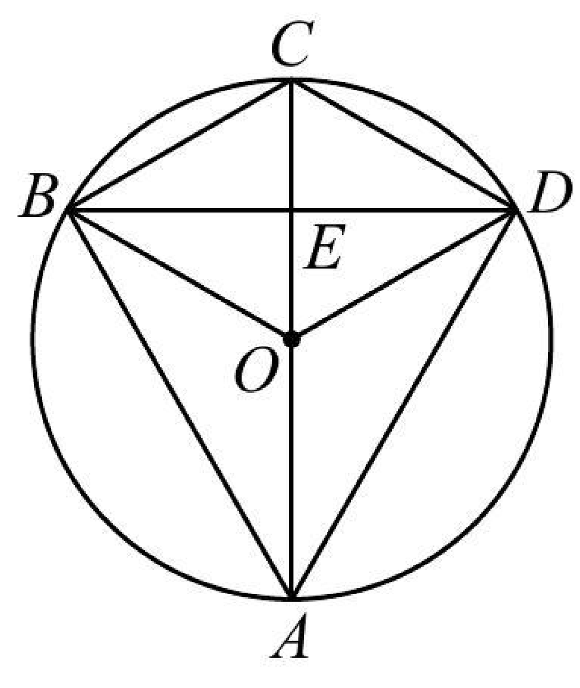


图1

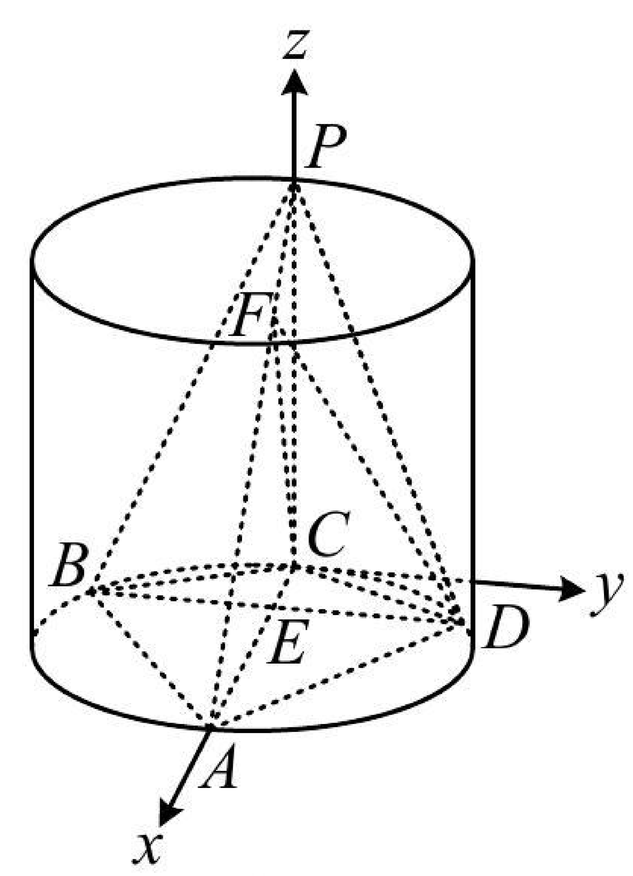
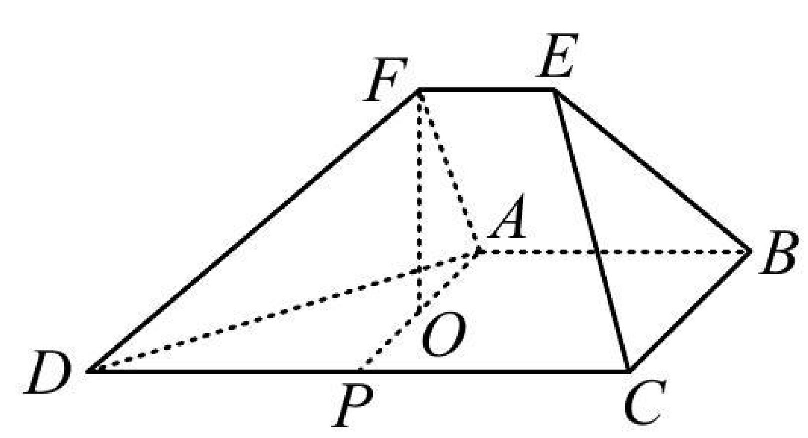


图2

6．（2023·宜宾模拟·★★★★）如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，$AB\,//\,CD\,//\,EF$，$\angle ABC=\angle BAF=90^{\circ}$，$CD=2AB=4EF=4$，$BC=AF=2$，$P$，$O$ 分别为 CD，AP 的中点，二面角 $F-AB-D$ 的大小为 60°.

（1）证明：$FO\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求平面 ADF 与平面 BCE 所成二面角的正弦值.



解：（1）（要证结论，需在面 $ABCD$ 内找两条与 FO 垂直的相交直线，若找不到，可先翻译已知条件再看，

例如，二面角 $F-AB-D$ 的平面角是谁？观察图形，结合已有 $FA\perp AB$，可猜想是 $\angle FAP$）

由题意，$AB=PC=\dfrac{1}{2}CD=2$，$AB/\!/PC$，所以四边形 $ABCP$ 是平行四边形，

又 $\angle ABC=90^{\circ}$，所以 $\angle BAP=90^{\circ}$，故 $AP\perp AB$，因为 $\angle BAF=90^{\circ}$，所以 $AF\perp AB$，

故 $\angle FAP$ 是二面角 $F-AB-D$ 的平面角，由题意，$\angle FAP=60^{\circ}$，

（做到这里，我们还可以发现 $AB\perp$ 面 AFP，所以证结论所需的面 $ABCD$ 内的直线一条应选 AB）

由 $\begin{cases}AF,AP\subset 平面AFP\\ AF\cap AP=A\\ AP\perp AB,AF\perp AB\end{cases}$ 可得 $AB\perp$ 平面 AFP，因为 $FO\subset$ 平面 AFP，所以 $FO\perp AB$ ①，

（另一条选谁呢？我们发现已有 $\angle FAP$，能在 ΔAOF 中求 FO，故可用勾股定理证 $FO\perp AO$，于是选 AO）

又 $AO=\dfrac{1}{2}AP=\dfrac{1}{2}BC=1$，所以 $FO^2=AF^2+AO^2-2AF\cdot AO\cdot\cos\angle FAO=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos60^{\circ}=3$，

从而 $FO^2+OA^2=4=AF^2$，故 $FO\perp AO$，结合①以及 AB，$AO\subset$ 平面 $ABCD$，$AO\cap AB=A$ 可得 $FO\perp$ 平面 $ABCD$.

（2）（两平面的交线未画出，故考虑建系求二面角）以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(-1,0,0)$，$F(0,0,\sqrt{3})$，$D(1,-2,0)$，$E(0,1,\sqrt{3})$，$C(1,2,0)$，$B(-1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AF}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(1,-1,\sqrt{3})$，

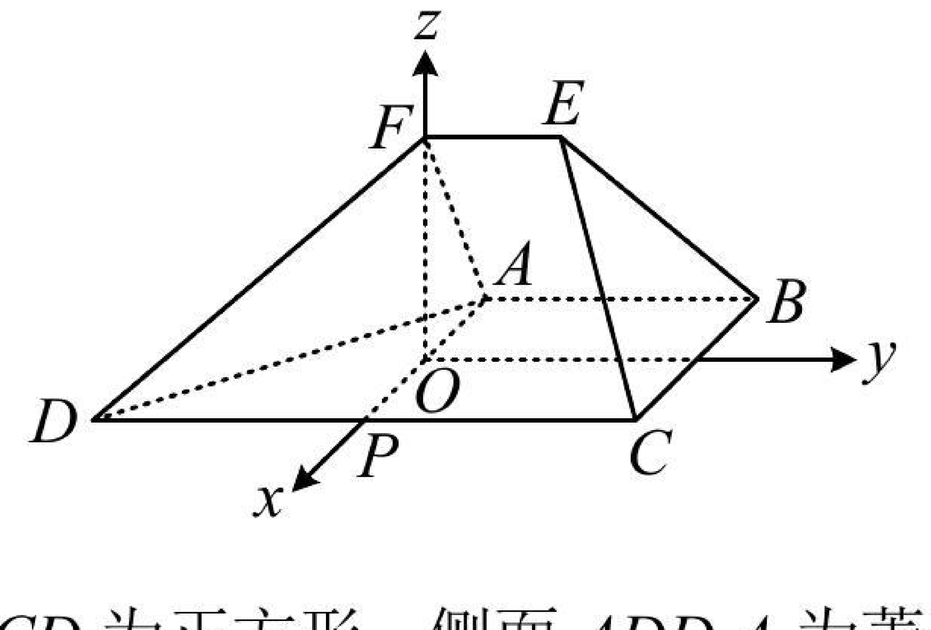
设平面 ADF，BCE 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=x_1+\sqrt{3}z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=2x_1-2y_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=\sqrt{3}$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$z_1=-1$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$ 是平面 ADF 的一个法向量，

又 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2x_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=x_2-y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x_2=0\\ -y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=\sqrt{3}$，则 $\begin{cases}x_2=0\\ z_2=1\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$ 是平面 BCE 的一个法向量，从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}\times2}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

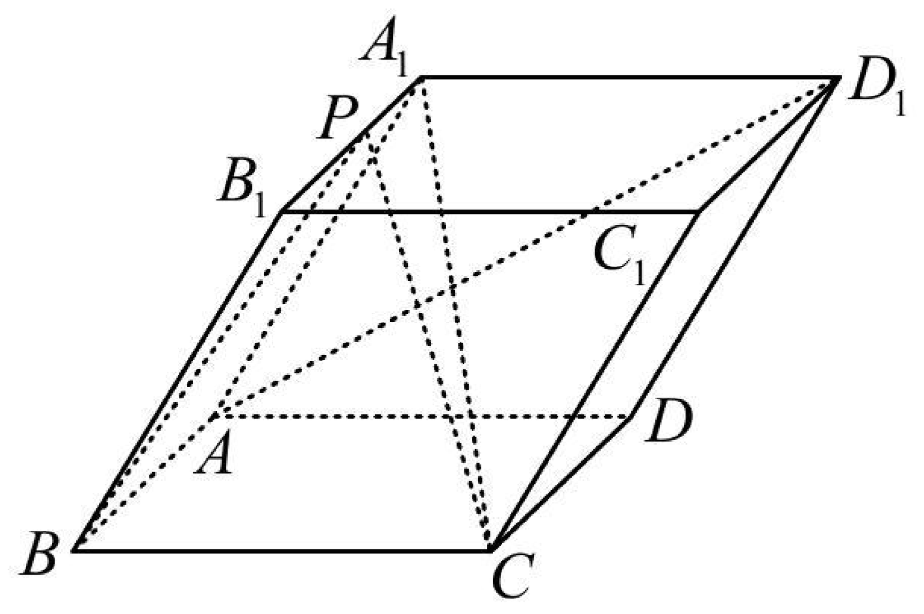
故平面 ADF 与平面 BCE 所成二面角的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{7}}{7})^2}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.



7.（2023·深圳模拟·★★★★）在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 ADD_1A_1 为菱形，且平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$.

（1）证明：$AD_1\perp A_1C$；

（2）设点 P 在棱 A_1B_1 上运动，若 $\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$，且 $AB=2$，记直线 AD_1 与平面 PBC 所成的角为 θ，当 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ 时，求 A_1P 的长度.



解：（1）（证线线垂直，应找线面垂直，结合题干的面面垂直，我们发现 A_1C 在面 ADD_1A_1 内的射影是 A_1D，故由三垂线定理可知我们要找的面是 A_1CD，即先证 $AD_1\perp$ 面 A_1CD）

如图，连接 A_1D，因为 $ABCD$ 为正方形，所以 $CD\perp AD$，又平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $ADD_1A_1\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1，

因为 $AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $AD_1\perp CD$ ①，

又 ADD_1A_1 为菱形，所以 $AD_1\perp A_1D$，结合①以及 A_1D，$CD\subset$ 平面 A_1CD，$A_1D\cap CD=D$ 可得 $AD_1\perp$ 平面 A_1CD，

因为 $A_1C\subset$ 平面 A_1CD，所以 $AD_1\perp A_1C$.

（2）（z 轴位置选哪？看见题目有面面垂直，故过 A_1 作交线 AD 的垂线，z 轴就有了）

取 AD 中点 O，连接 A_1O，因为 ADD_1A_1 为菱形，所以 $AA_1=AD$，又 $\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$，所以 ΔAA_1D 为正三角形，

故 $A_1O\perp AD$，结合平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$ 可得 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$，

以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，由 $AB=2$ 可得 $AD=2$，$A_1O=\sqrt{3}$，

所以 $A_1(0,0,\sqrt{3})$，$B_1(2,0,\sqrt{3})$，$B(2,-1,0)$，$C(2,1,0)$，$A(0,-1,0)$，$D_1(0,2,\sqrt{3})$，

（P 是动点，观察发现直线 A_1B_1 在面 $ABCD$ 上的射影就是 x 轴，所以 P 的坐标只有 x 分量会变）

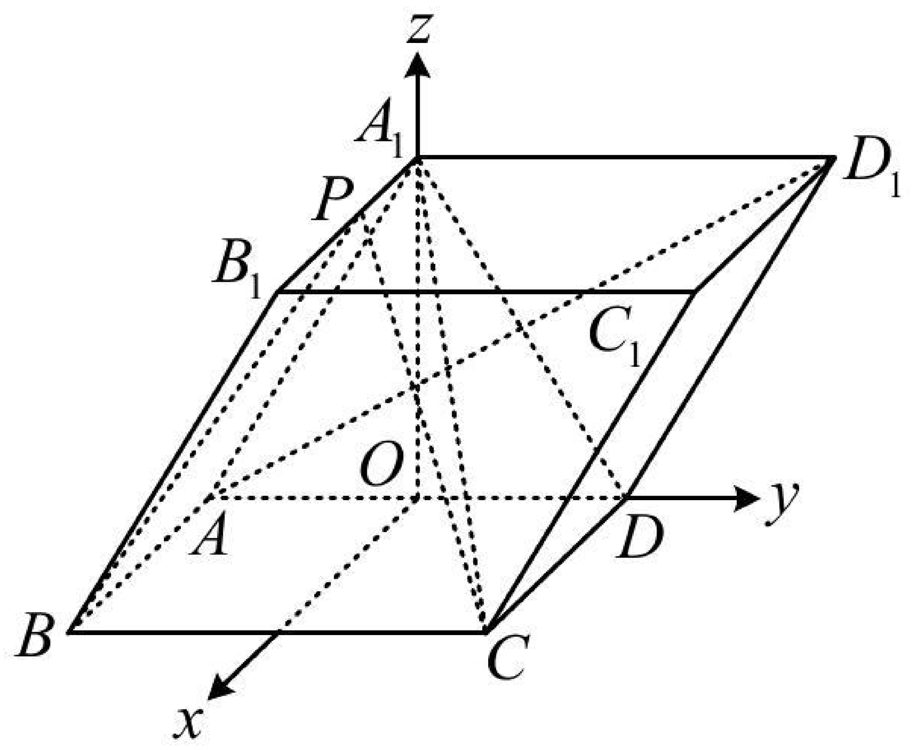
点 P 在 A_1B_1 上运动，可设 $P(m,0,\sqrt{3})(0\le m\le 2)$，所以 $\overrightarrow{AD_1}=(0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(m-2,1,\sqrt{3})$，

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=(m-2)x+y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $\begin{cases}y=0\\ z=2-m\end{cases}$，

故 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,2-m)$ 是平面 PBC 的一个法向量，由题意，

$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AD_1},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AD_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}(2-m)}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3+(2-m)^2}}=\dfrac{1}{4}$，

解得：$m=1$，所以 $A_1P=1$.



【反思】当 P 是线上动点时，若能看出其坐标规律，则可直接设坐标. 如本题点 P 的 y 坐标为 0，z 坐标为 $\sqrt{3}$，只有 x 坐标未定，则可直接设 $P(m,0,\sqrt{3})$. 若没看出此规律，也可设 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B}$，并由此将点 P 的坐标用 λ 表示.